Calculs et interprétations des différentes unités de Planck

Claude Mercier ing., 12 octobre 2014 claude.mercier@gctda.com
Rév. 17 octobre 2015

Les unités de Planck font partie d'un système d'unités dites "naturelles". Les noms de ces unités ont été donnés en l'honneur de Max Karl Ernst Planck et en reconnaissance des services rendus à l'avancement de la physique par sa découverte des quanta d'énergie.

Ces unités sont habituellement données à partir des constantes de physiques de base, telles que la constante de Planck ħ, la vitesse de la lumière dans le vide c, la constante gravitationnelle universelle G, la constante de Boltzmann k_B, et la permittivité du vide ε_0.

Nous verrons qu'en plus d'être un système d'unités utile, les unités de Planck représentent toujours une réalité physique où un paramètre physique est optimisé. Nous verrons aussi qu'il est possible de calculer plus précisément ces unités en utilisant d'autres constantes de physique qui ne sont pas couramment utilisées pour décrire ces unités.

MOTS CLÉS : Unités de Planck

1. INTRODUCTION

Les unités de Planck peuvent sembler découler d'un exercice de numérologie où l'on met ensemble différentes constantes de physique de base pour obtenir des valeurs qui possèdent les unités voulues. Mais il n'en est rien. Les unités de Planck découlent toutes du fait que notre univers est quantique. Elles peuvent être déduites du principe d'incertitude d'Heisenberg qui dit qu'il n'est pas possible de connaître précisément et en même temps la position d'un objet et sa vitesse. Le simple fait de mesurer la vitesse d'un objet perturbera sa position et vice et versa.

Même si à notre échelle le continuum espace-temps de l'univers semble continu, ses différentes propriétés sont en fait constituées de minuscules « escaliers ». Cette quantification s'applique au temps, aux distances, aux masses, à l'énergie, etc.

Les unités de Planck simplifient plusieurs équations de physique en supprimant des facteurs de conversion. Voici quelques exemples (à gauche, les équations de base et à droite, les équations montrées en unités de Planck) :

L'équation de gravitation universelle de Newton devient :

$$F = \frac{-G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \rightarrow \quad F = \frac{-m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{1}$$

L'équation d'énergie de la relativité d'Einstein devient :

$$E = m \cdot c^2 \quad \rightarrow \quad E = \mathrm{m} \tag{2}$$

L'équation de la loi de Coulomb devient :

$$F = \frac{-q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \quad \rightarrow \quad F = \frac{-q_1 \cdot q_2}{r^2} \tag{3}$$

Et ainsi de suite...

Une des caractéristiques des unités de Planck, c'est qu'elles peuvent toutes être définies en fonction d'une ou plusieurs des constantes de physiques suivantes :

- Vitesse de la lumière dans le vide c
- Constante gravitationnelle G
- Permittivité du vide ε_0
- Constante de Planck $\hbar$
- Constante de Boltzmann k_b
- Perméabilité du vide μ_0

Le fait que les unités de Planck représentent des limites physiques dictées par le principe d'incertitude d'Heisenberg fait en sorte que toutes les unités de Planck, de base ou secondaires, représentent en fait des limites physiques ou des caractéristiques pour lesquelles certains paramètres sont optimisés.

Les unités de Planck de base sont le temps de Planck t_p , la longueur de Planck l_p , la masse de Planck m_p , la température T_p et la charge de Planck q_p. Cependant, plusieurs autres unités secondaires peuvent découler de celles-ci.

Dans ce document, nous nous attarderons à déterminer avec précision les unités de Planck suivantes tout en mentionnant quelle réalité physique elles peuvent représenter :

- Le temps de Planck t_p
- La longueur de Planck l_p
- La masse de Planck m_p
- La température de Planck T_p
- La charge de Planck q_p
- La fréquence angulaire de Planck ω_p
- La force de Planck F_p
- La pression de Planck p_p
- L'énergie de Planck E_p
- La puissance de Planck ρ_p
- La tension de Planck V_p
- L'impédance de Planck Z_p
- La surface de Planck s_p
- Le volume de Planck v_p

Mentionnons que l'obtention des nouvelles équations proposées dans ce document est rendue possible suite à des travaux que nous avons réalisés précédemment et qui nous ont permis de déterminer la constante gravitationnelle universelle G plus précisément.

2. DÉVELOPPEMENT

2.1. Le temps de Planck t_p

Le temps de Planck est une unité de temps dite « naturelle », car elle dépend uniquement de constantes connues telles que la constante de gravitation universelle G, la constante de Planck h et la vitesse de la lumière c. Le temps de Planck n'est cependant pas uniquement une unité de mesure du temps. Contrairement aux unités de temps conventionnelles (ex. : secondes), le temps de Planck n'est pas choisi arbitrairement. Il a une signification physique intrinsèque.

Dans ce document, nous voulons montrer, entre autres, d'où provient cette unité et surtout, ce qu'elle signifie réellement. Nous pourrons ensuite utiliser ces calculs pour déterminer d'autres unités de Planck. Pour ce faire, nous commencerons par démontrer la provenance de l'équation du temps de Planck.

Heisenberg énonça pour la première fois, en 1927, le principe d'incertitude qui est maintenant un des fondements de la mécanique quantique. Ce principe dit qu'il n'est pas possible de connaître précisément la vitesse et la position d'un objet simultanément.

Dans un deuxième énoncé, Heisenberg nous apprend que l'incertitude sur la mesure de l'énergie d'un corps est inversement proportionnelle à la durée de la mesure. Une autre manière de formuler cet énoncé est de dire que le produit de l'énergie ΔE par le temps Δt doit être :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

Selon le CODATA 2010 [1], la valeur de la constante de Planck est donnée par $h \approx 6{,}62606957(29) \times 10^{-34}$ Joule·s. La constante de Planck réduite est dénotée $\hbar = h / 2 \cdot \pi$.

Pour une masse m_0 au repos, l'énergie est [12,13] :

$$\Delta E = m_0 \cdot c^2 \tag{5}$$

Selon le CODATA 2010 [1], la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est donnée par $c \approx 299792458$ m/s.

En considérant seulement le cas où Δt est la plus petite quantité de temps possible, nous rebaptisons Δt par t_p et nous gardons seulement l'égalité dans **(4)** .

En isolant ensuite t_p, nous obtenons :

$$t_p = \frac{\hbar}{2 \cdot m_0 \cdot c^2} \quad \textbf{(6)}$$

Supposons maintenant que nous prenons un photon au repos de masse m_0, qui est à une position infinie, et supposons que nous confinons ce photon dans une sphère de rayon r. La variation d'énergie potentielle ΔE_p dépensée serait alors :

$$\Delta E_p = -G \cdot m_0{}^2 \cdot \left.\left(\frac{1}{r_\infty} - \frac{1}{r}\right)\right|_{r_\infty = \infty} = \frac{G \cdot m_0{}^2}{r} \quad \textbf{(7)}$$

Ici, G est la constante de gravitation universelle.

En choisissant r de telle sorte que la variation d'énergie potentielle ΔE_p corresponde à la moitié de ΔE, nous obtenons le cas particulier suivant :

$$\frac{m_0 \cdot c^2}{2} = \frac{G \cdot m_0{}^2}{r} \quad \textbf{(8)}$$

Si nous isolons r, nous obtenons exactement ce que nous appelons le rayon de Schwarzschild :

$$r = \frac{2 \cdot G \cdot m_0}{c^2} \quad \textbf{(9)}$$

Ce rayon est celui d'un trou noir. Pour ce rayon, la vitesse de la lumière devient nulle. En isolant m_0, nous obtenons :

$$m_0 \cdot = \frac{r \cdot c^2}{2 \cdot G} \quad \textbf{(10)}$$

En utilisant **(10)** dans **(6)**, nous obtenons :

$$t_p = \frac{\hbar \cdot G}{r \cdot c^4} \quad \textbf{(11)}$$

Mais r peut être obtenu par la relation :

$$r = c \cdot t_p \quad \textbf{(12)}$$

Selon les équations **(11)** et **(12)** le temps de Planck t_p est défini par :

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^5}} = \sqrt{\frac{h \cdot G}{2 \cdot \pi \cdot c^5}} \quad \textbf{(13)}$$

Cette équation permet ainsi de calculer la plus petite unité de temps mesurable.

Selon le CODATA 2010 [1], la valeur du temps de Planck est donnée par $t_p \approx 5{,}39106(32) \times 10^{-44}$ s.

La plus grosse incertitude sur la valeur du temps de Planck t_p réside dans la valeur de la constante gravitationnelle G qui est extrêmement difficile à mesurer. Pour mesurer cette constante, les physiciens utilisent présentement une balance à torsion inventée par Cavendish.

Pour construire une balance à torsion de Cavendish, un petit fil métallique conducteur est suspendu au plafond d'un support métallique éloigné (pour éviter les interactions gravitationnelles). Dans cette balance, tout est fait de métal ou de matériaux conducteurs pour conduire les charges électriques à une mise à la terre. Ce stratagème fait en sorte d'éviter l'accumulation de charges électriques qui pourraient fausser les données en créant un champ électrique. Au bout du fil est suspendue une barre horizontale conductrice. À l'extrémité de celle-ci, sont montées deux masses métalliques identiques. Ces masses sont les plus grosses possible tout en évitant que le fil de suspension ne lâche. Deux autres masses fixes montées sur un support métallique sont insérées à un instant donné. Les masses qui sont suspendues sur le fil métallique se mettent alors en mouvement vers les autres masses qui sont montées sur l'armature. Le mouvement de rotation des masses autour de l'axe de rotation que constitue le fil de suspension s'arrête lorsque la force d'attraction entre les masses est égale à la force de torsion du fil métallique. Cette force de torsion réagit exactement comme un ressort de faible intensité. Connaissant la constante de ce ressort et connaissant l'angle de rotation des masses, nous en déduisons la force d'attraction gravitationnelle entre les masses. Connaissant la valeur des masses, nous en déduisons la valeur de la constante gravitationnelle universelle dans l'équation de Newton.

Bien que les équations de la relativité générale d'Einstein soient plus précises que celle de Newton pour calculer et prédire les trajectoires de masses en mouvement, l'équation de la théorie de Newton sur l'attraction universelle des masses est considérée infiniment précise pour les forces statiques. Même les équations d'Einstein se calibrent à l'aide de l'équation de Newton pour des forces statiques. Au même titre que l'équation de Newton, les équations de la relativité générale d'Einstein utilisent la constante de gravitation universelle G.

Dans une balance à torsion de Cavendish, pour éviter que les masses ne brisent le fil de suspension sous leur poids, les masses impliquées sont relativement petites. Même les masses extérieures sont forcées d'être limitées par les limites physiques. Bien sûr, les masses sont faites de métaux nobles et stables (pour éviter une variation de masse au cours du temps) possédant une grande masse volumique. En raison des faibles masses impliquées, les forces générées demeurent extrêmement faibles. Elles sont difficiles à mesurer avec précision, même en étant extrêmement précautionneux. Des phénomènes extérieurs peuvent facilement interférer avec la balance. Par exemple, les vibrations internes de la

Terre (secousses sismiques, circulation routière et autres), l'éclairage ambiant (les photons peuvent créer une poussée involontaire), la température ambiante (qui peut changer la constante du fil de torsion), la position de la Terre, de la Lune et du Soleil (qui peuvent créer des forces ou contre-forces supplémentaires), etc. Bref, même avec toute la minutie du monde, il est pratiquement impossible d'être en contrôle de tous les paramètres impliqués.

Depuis quelques années, le bureau des poids et mesures essaie d'étalonner toutes les unités de mesure en se référant à la vitesse de la lumière dans le vide qui est facilement répétable et mesurable avec une grande précision grâce aux lasers. Selon les postulats de la relativité, la vitesse de la lumière est invariante dans le temps. Selon nos travaux, nous savons que ce n'est pas entièrement vrai et que la lumière subit une faible accélération au cours du temps. Cependant, malgré ce phénomène, si nous arrivions à garantir la précision d'une masse quelconque avec la même résolution que celle de la vitesse de la lumière, cela représenterait une percée majeure dans le monde de la métrologie.

Malgré tous ces efforts de standardisation, à l'instar des unités de temps et de distance, la définition de la masse ne peut (pour l'instant) être reliée à la vitesse de la lumière dans le vide. Pour cette raison, la définition de la masse ne s'est pas beaucoup améliorée au cours des années. Nous devons encore utiliser un étalon qui se dégrade d'année en année en perdant de la masse en raison des isotopes radioactifs qui le composent et en raison des manipulations de comparaison et de nettoyage qui sont faites de temps à autre. L'étalon du kilogramme se dégrade et limite la précision des mesures. Il n'est pas facilement comparable et la répétabilité des étalons secondaires laisse grandement à désirer.

Dans de précédents travaux [11], nous avons trouvé une équation qui donne la valeur de la constante gravitationnelle universelle *G* en fonction de constantes de physique possédant une précision similaire à celle de la vitesse de la lumière dans le vide.

$$G = \frac{c^2 \cdot r_e \cdot \alpha^{20}}{m_e \cdot \beta} \approx 6{,}673230436(30) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)} \tag{14}$$

Selon le CODATA 2010 [1] :

- Constante de gravitation universelle $G \approx 6{,}67384(80) \times 10^{-11}$ m^3/(kg·s^2)
- Vitesse de la lumière dans le vide donnée par $c \approx 299792458$ m/s
- Rayon classique de l'électron $r_e \approx 2{,}8179403267(27) \times 10^{-15}$ m
- Masse de l'électron $m_e \approx 9{,}10938291(40) \times 10^{-31}$ m
- Constante de structure fine $\alpha \approx 7{,}2973525698(24) \times 10^{-3}$

La valeur de β est un nombre irrationnel. Elle exprime le rapport entre la vitesse d'expansion de l'univers matériel et la vitesse de la lumière dans le vide c [10] :

$$\beta = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}76 \qquad \textbf{(15)}$$

Pour obtenir une meilleure précision, essayons d'exprimer l'équation **(13)** sans l'aide de la constante gravitationnelle G et sans la constante de Planck h.

Le rayon de Compton r_c peut être calculé à partir de l'égalité suivante entre l'énergie contenue dans la masse au repos de l'électron et l'onde qui lui est associée :

$$m_e \cdot c^2 = \frac{h \cdot c}{2\pi \cdot r_c} \qquad \textbf{(16)}$$

Le rayon de Compton peut être décrit en fonction du rayon classique de l'électron r_e et de la constante de structure fine α :

$$r_e = \alpha \cdot r_c \qquad \textbf{(17)}$$

En utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(13)**, nous obtenons :

$$t_p = \frac{r_e}{c}\sqrt{\frac{\alpha^{19}}{\beta}} \approx 5{,}3908142(52) \times 10^{-44}\,\mathrm{s} \qquad \textbf{(18)}$$

Cette équation est 1200 fois plus précise que la valeur du CODATA 2010 [1]**.**

Étant donné que le temps de Planck t_p découle du principe d'incertitude d'Heisenberg qui utilise la plus petite quantité d'énergie mesurable, le temps de Planck représente alors la plus petite unité de temps mesurable. Le temps s'égraine à coups d'échelons qui s'accumulent. Toutes les variations de temps sont nécessairement un multiple entier du temps de Planck t_p.

Il est intéressant de noter, sans chercher à le démonter ici, que le temps de Planck t_p peut être décrit en fonction de l'âge apparent de l'univers et de la constante de structure fine α :

$$t_p = T_u\sqrt{\alpha^{57}} = \frac{1}{H_0}\sqrt{\alpha^{57}} \qquad \textbf{(19)}$$

Il faut savoir que l'âge apparent de l'univers [2] T_u est égal à l'inverse de la constante de Hubble H_0 [9].

$$T_u = \frac{1}{H_0} \qquad \textbf{(20)}$$

Dans des travaux antérieurs, nous avons montré que la constante de Hubble pouvait être déterminée avec précision à l'aide de l'équation suivante [11,14]:

$$H_0 = \frac{c \cdot \alpha^{19} \cdot \beta^{1/2}}{r_e} \approx 72{,}09548632(46) \text{ km/(s·MParsec)} \quad \textbf{(21)}$$

Cette valeur est en partie vérifiée par l'équipe de Xiaofeng Wang [15] qui a mesuré une valeur de $H_0 \approx 72{,}1(9)$ km/(s·MParsec).

2.2. La longueur de Planck l_p

La longueur de Planck l_p est définie par :

$$l_p = c \cdot t_p = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}} \quad \textbf{(22)}$$

Selon le CODATA 2010 [1], la valeur de la longueur de Planck est donnée par $l_p \approx 1{,}616199(97) \times 10^{-35}$ m.

Dans l'équation **(22)**, la vitesse de la lumière c représente une limite supérieure infranchissable selon les postulats de la relativité. Le temps de Planck t_p est la plus petite unité de temps mesurable. Par conséquent, la longueur de Planck l_p représente la plus petite unité de longueur qu'un photon peut franchir tout en étant mesurable. Un photon qui voyage dans l'espace avancera par incrément de distance égal à la longueur de Planck. Tous les parcours dans l'espace sont en fait un multiple entier de la longueur de Planck l_p.

Pour obtenir une meilleure précision dans l'évaluation de la longueur de Planck l_p, essayons d'exprimer l'équation **(22)** sans l'aide de la constante gravitationnelle G et sans la constante de Planck h.

En utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(22)**, nous obtenons :

$$l_p = r_e \cdot \sqrt{\frac{\alpha^{19}}{\beta}} \approx 1{,}616125436(53) \times 10^{-35} \text{m} \quad \textbf{(23)}$$

Cette équation est 18000 fois plus précise que la valeur du CODATA 2010 [1]**.**

Il est intéressant de noter, sans chercher à le démonter ici, que la longueur de Planck l_p peut être décrite en fonction du rayon de courbure apparent de l'univers R_u et de la constante de structure fine α :

$$l_p = R_u \sqrt{\alpha^{57}} = \frac{c}{H_0}\sqrt{\alpha^{57}} \qquad \textbf{(24)}$$

2.3. La masse de Planck m_p

La masse de Planck m_p est la masse que possède une particule lorsqu'elle atteint son niveau d'énergie le plus élevé. Cette propriété découle de la dualité onde-particule de la matière.

Du point de vue corpusculaire, l'énergie d'une particule de masse m_p peut être donnée par l'équation de la relativité d'Einstein :

$$E = m_p \cdot c^2 \qquad \textbf{(25)}$$

Du point de vue ondulatoire, l'énergie d'une onde de longueur d'onde $2\pi \cdot l_p$ est donnée par l'équation suivante :

$$E = \frac{h \cdot c}{2\pi \cdot l_p} \qquad \textbf{(26)}$$

En faisant l'égalité des deux dernières équations, nous obtenons :

$$m_p \cdot c^2 = \frac{h \cdot c}{2\pi \cdot l_p} \qquad \textbf{(27)}$$

Si nous remplaçons l_p par l'équation **(22)** et que nous isolons m_p, nous obtenons l'équation qui est décrite dans le CODATA 2010 [1] pour la masse de Planck m_p qui est définie par :

$$m_p = \sqrt{\frac{h \cdot c}{2\pi \cdot G}} = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}} \approx 2{,}17651(13) \times 10^{-8}\,\mathrm{k}g \qquad \textbf{(28)}$$

Étant donné que cette équation est obtenue à partir de la plus petite longueur d'onde possible (voir l'équation **(26)**), nous en concluons que cette équation représente le niveau d'énergie le plus élevé possible pour une particule. Par conséquent, m_p qui découle de l'égalité de cette équation avec l'équation **(25)** représente nécessairement la plus grande masse possible pour une particule.

Il est intéressant de noter que la masse de Planck m_p correspond aussi à la moyenne géométrique entre la masse la plus grande qui soit (celle de la masse apparente de l'univers m_u) et la masse la plus petite qui soit (celle de la masse m_{ph} qui est associée au photon qui a la plus grande longueur d'onde et qui a le diamètre apparent de l'univers $2\pi \cdot R_u$).

La masse apparente de l'univers m_u est donnée par [3,4]:

$$m_u = \frac{c^3}{G \cdot H_0} \tag{29}$$

La masse m_{ph} du photon de longueur d'onde $2\pi{\cdot}R_u$ est donnée par l'équation suivante :

$$m_{ph} = \frac{h}{2\pi \cdot R_u \cdot c} \tag{30}$$

Le rayon de courbure apparent de l'univers R_u (qui peut porter une variété de noms dans différents documents) est donné par l'équation suivante [5,6,7,8] :

$$R_u = \frac{c}{H_0} \tag{31}$$

En utilisant les équations **(28)** à **(31)**, il est possible de montrer que la moyenne géométrique entre la masse apparente de l'univers m_u et la masse associée au photon le plus léger m_{ph} donne exactement la masse de Planck m_p :

$$m_p = \sqrt{m_u \cdot m_{ph}} \tag{32}$$

Il est possible de définir la masse de Planck m_p plus précisément que l'équation **(28)** en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(22)** :

$$m_p = m_e \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^{21}}} \approx 2{,}17660867(10) \times 10^{-8}\,\mathrm{kg} \tag{33}$$

Cette valeur est 1300 fois plus précise que celle présentée dans le CODATA 2010 [1].

2.4. La température de Planck T_p

La masse de Planck m_p correspond au niveau d'énergie le plus haut qu'il est possible de rencontrer pour une particule. Par conséquent, lorsque l'énergie d'une telle particule est convertie en pure énergie, la température enregistrée est alors la plus élevée qu'il est possible d'obtenir dans l'univers.

L'énergie E contenue dans une particule possédant la masse de Planck m_p est donnée par l'équation de conversion masse-énergie d'Einstein :

$$E = m_p \cdot c^2 \tag{34}$$

De même, l'énergie E contenue dans une particule dont la température est T_p est donnée par :

$$E = k_b \cdot T_p \quad \textbf{(35)}$$

En faisant l'égalité et en isolant T_p , nous obtenons la température de Planck T_p qui peut être redéfinie comme suit en utilisant l'équation **(28)** :

$$T_p = \frac{m_p \cdot c^2}{k_b} = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G \cdot k_b^2}} \approx 1{,}416833(85) \times 10^{32}\ °K \quad \textbf{(36)}$$

Il est possible de définir la température de Planck plus précisément en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(36)**. Nous obtenons alors :

$$T_p = \frac{m_e \cdot c^2}{k_b} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^{21}}} \approx 1{,}4168978(13) \times 10^{32}\ °K \quad \textbf{(37)}$$

Cette valeur est 65 fois plus précise que celle présentée dans le CODATA 2010 [1].

2.5. La charge de Planck q_p

Commençons par montrer d'où vient l'équation de la charge de Planck pour montrer qu'elle correspond à la charge la plus élevée qu'une particule puisse avoir.

Encore une fois, l'énergie E contenue dans une particule possédant la masse de Planck m_p est donnée par l'équation de conversion masse-énergie d'Einstein :

$$E = m_p \cdot c^2 \quad \textbf{(38)}$$

Nous pouvons considérer que l'entièreté de l'énergie cinétique contenue dans la masse de la particule provient de l'énergie électrostatique E contenue dans une particule ponctuelle qui possède un rayon de la longueur de Planck l_p et une charge q_p. Cette énergie est donnée par l'équation suivante :

$$E = \frac{q_p^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l_p} \quad \textbf{(39)}$$

En faisant égaler les équations **(38)** et **(39)** et en isolant la charge de Planck q_p , nous obtenons :

$$q_p = \sqrt{4\pi \cdot m_p \cdot l_p \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2} \quad \textbf{(40)}$$

La vitesse de la lumière est définie en fonction de la perméabilité du vide μ_0 et de la permittivité du vide ε_0 comme suit :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} \quad \textbf{(41)}$$

Il est donc possible de réécrire l'équation **(40)** à l'aide de l'équation **(41)** :

$$q_p = \sqrt{\frac{4\pi \cdot m_p \cdot l_p}{\mu_0}} \quad \textbf{(42)}$$

En utilisant les équations **(22)** et **(28)** dans l'équation **(42)**, nous obtenons la charge de Planck q_p en fonction de la constante de Planck h :

$$q_p = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\mu_0 \cdot c}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot \hbar}{\mu_0 \cdot c}} \quad \textbf{(43)}$$

Notons qu'en raison du fait que la charge de Planck est décrite ici en utilisant la masse de Planck m_p et la longueur de Planck l_p qui correspondent à des extrêmes, nous concluons que la charge de Planck q_p correspond à la charge maximale qui puisse être possible de mesurer pour une particule.

Si maintenant, nous utilisons l'équation **(41)** dans l'équation **(43)**, nous obtenons :

$$q_p = \sqrt{2c \cdot h \cdot \varepsilon_0} \approx 1{,}8755460(41) \times 10^{-18} \text{ Coulomb} \quad \textbf{(44)}$$

Il est intéressant de constater, sans chercher à le démontrer ici, qu'il est aussi possible de décrire la charge de Planck en fonction de la masse apparente de l'univers m_u et de son rayon de courbure apparent R_u :

$$q_p = \sqrt{\frac{4\pi \cdot m_u \cdot R_u \cdot \alpha^{57}}{\mu_0}} \quad \textbf{(45)}$$

La charge de l'électron q_e peut être définie en fonction de la masse de l'électron m_e , du rayon classique de l'électron r_e et de la perméabilité du vide μ_0 :

$$q_e = \sqrt{\frac{4\pi \cdot m_e \cdot r_e}{\mu_0}} \quad \textbf{(46)}$$

Il est possible de définir la charge de Planck tout aussi précisément qu'en **(44)** en la définissant à partir de la charge de l'électron q_e , de la masse de l'électron m_e, du rayon classique de l'électron r_e, de la constante de structure fine α et de la perméabilité du vide μ_0 en utilisant les équations **(14)**, **(15)**, **(16)** et **(46)** dans l'équation **(42)**. Nous obtenons alors :

$$q_p = q_e \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot m_e \cdot r_e}{\mu_0 \cdot \alpha}} \approx 1{,}8755460(41) \times 10^{-18} \text{ Coulomb} \qquad \textbf{(47)}$$

2.6. La fréquence angulaire de Planck ω_p

La fréquence angulaire de Planck ω_p est définie par :

$$\omega_p = \frac{1}{t_p} = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar \cdot G}} \approx 1{,}85492(11) \times 10^{43} \text{ rad/s} \qquad \textbf{(48)}$$

Étant donné que la fréquence angulaire de Planck ω_p est l'inverse du temps de Planck t_p qui est la plus petite unité de temps possible, ω_p représente alors la fréquence angulaire maximale qu'une particule puisse avoir lorsqu'elle atteint son niveau d'énergie le plus élevé, c'est-à-dire lorsqu'une particule de rayon égale à la longueur de Planck l_p tourne au point que la vitesse de la périphérie de la particule atteigne la vitesse de la lumière c.

Il est intéressant de noter, sans chercher à le démontrer ici, que la fréquence angulaire de Planck ω_p peut être décrite en fonction de l'âge apparent de l'univers T_u et de la constante de structure fine α.

$$\omega_p = \frac{1}{T_u} \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha^{57}}} = H_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha^{57}}} \qquad \textbf{(49)}$$

Il est possible de définir la fréquence angulaire de Planck plus précisément en la définissant à partir de la vitesse de la lumière dans le vide, du rayon classique de l'électron r_e, de la constante de structure fine α et du facteur β en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** :

$$\omega_p = \frac{c}{r_e} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^{19}}} \approx 1{,}85500736(61) \times 10^{43} \text{ rad/s} \qquad \textbf{(50)}$$

2.7. La force de Planck F_p

La force de Planck F_p est définie par :

$$F_p = \frac{m_p \cdot l_p}{t_p^2} = \frac{c^4}{G} \approx 1{,}21034(15) \times 10^{44} \text{ N} \quad \textbf{(51)}$$

En raison du fait que nous utilisons la masse de Planck m_p et le temps de Planck t_p pour décrire cette force, la force de Planck F_p correspond à la force la plus élevée que l'on puisse appliquer sur un objet.

Cette évaluation de la force de Planck n'est pas très précise en raison du fait qu'elle utilise la constante gravitationnelle telle que définie dans le CODATA 2010 [1].

Il est intéressant de constater, sans chercher à le démontrer ici, que la force de Planck F_p est aussi égale à la force requise pour accélérer la masse apparente de l'univers m_u sur une distance égale au rayon de courbure apparent de l'univers R_u durant une période de temps égale à l'âge apparent de l'univers T_u. En utilisant l'équation de Newton $F = m \cdot a$ (où m est la masse de l'objet en kg et a son accélération en m/s^2), nous obtenons :

$$F_p = m_u \cdot \frac{R_u}{T_u^2} = m_u \cdot R_u \cdot H_0^2 = m_u \cdot c \cdot H_0 = \frac{m_u \cdot c^2}{R_u} \quad \textbf{(52)}$$

Étant donné que la masse apparente de l'univers m_u, que le rayon apparent de l'univers R_u et que l'âge apparent de l'univers T_u sont sans conteste les plus grandes valeurs qui soient pour ces unités de mesure, nous en concluons encore une fois que la force de Planck F_p est la force la plus grande que l'on puisse appliquer sur un objet.

Rappelons que l'âge apparent de l'univers T_u est donné par l'inverse de la constante de Hubble H_0 :

$$T_u = \frac{1}{H_0} \approx 72{,}09548632(46) \text{ km/(s} \cdot \text{MParsec)} \approx 4{,}27998719(27) \times 10^{17} \text{ s} \quad \textbf{(53)}$$

Il est possible de définir la force de Planck F_p plus précisément en la définissant à partir de la masse de l'électron m_e, du rayon classique de l'électron r_e, de la constante de structure fine α et du rapport β en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(51)** :

$$F_p = \frac{m_e \cdot c^2 \cdot \beta}{r_e \cdot \alpha^{20}} \approx 1{,}210449555(53) \times 10^{44} \text{ N} \qquad \textbf{(54)}$$

2.8. La pression de Planck p_p

La pression de Planck p_p est définie par :

$$p_p = \frac{F_p}{l_p^2} = \frac{c^7}{\hbar \cdot G^2} \approx 4{,}6344(11) \times 10^{113} \text{ N/m}^2 \qquad \textbf{(55)}$$

Étant donné qu'elle découle de la plus grande force appliquée sur la plus petite surface, cette pression est la plus grande pression qu'il est possible d'exercer sur une particule.

Il est intéressant de constater, sans chercher à le démontrer ici, que la pression de Planck p_p est aussi égale à la pression qu'exercerait la masse de tout l'univers si elle était accélérée sur une distance égale au rayon de courbure apparent de l'univers R_u durant une période de temps égale à l'âge apparent de l'univers T_u et que cette force équivalente était appliquée sur une surface carrée ayant comme côtés la longueur de Planck l_p.

$$p_p = \frac{m_u \cdot R_u}{T_u^2 \cdot L_p^2} = \frac{m_u \cdot R_u \cdot H_0^2}{L_p^2} = \frac{m_u \cdot c \cdot H_0}{L_p^2} = \frac{m_u \cdot c^2}{R_u \cdot L_p^2} \qquad \textbf{(56)}$$

Il est possible de définir la pression de Planck p_p plus précisément en la définissant à partir de la masse de l'électron m_e, du rayon classique de l'électron r_e, de la constante de structure fine α et β en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(55)** :

$$p_p = \frac{m_e \cdot c^2 \cdot \beta^2}{r_e^3 \cdot \alpha^{39}} \approx 4{,}63443253(21) \times 10^{113} \text{ N/m}^2 \qquad \textbf{(57)}$$

2.9. L'énergie de Planck E_p

L'énergie de Planck E_p est définie par :

$$E_p = F_p \cdot l_p = m_p \cdot c^2 = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G}} \approx 1{,}95615(12) \times 10^9 \text{ J} \qquad \textbf{(58)}$$

Cette énergie correspond au niveau maximal d'énergie que peut posséder une particule. En effet, la masse ultime pour une particule est la masse de Planck m_p et la vitesse de la lumière dans le vide c représente la vitesse limite supérieure.

Il est intéressant de constater, sans chercher à le démontrer ici, que l'énergie de Planck E_p est aussi égale à l'énergie que dissiperait la masse m_u de tout l'univers si elle était convertie en pure énergie par l'équation de la relativité restreinte d'Einstein multiplié par le rapport entre la longueur de Planck l_p et le rayon de courbure apparent de l'univers R_u.

$$E_p = m_u \cdot c^2 \cdot \frac{l_p}{R_u} \qquad \textbf{(59)}$$

Il est possible de définir l'énergie de Planck E_p plus précisément en la définissant à partir de la masse de l'électron m_e, du rayon classique de l'électron r_e, de la constante de structure fine α et du facteur β en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(58)** :

$$E_p = m_e \cdot c^2 \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^{21}}} \approx 1{,}95623831(86) \times 10^9 \text{ J} \qquad \textbf{(60)}$$

2.10. La puissance de Planck P_p

La puissance de Planck P_p est définie par :

$$P_p = \frac{E_p}{t_p} = \frac{c^5}{G} \approx 3{,}62850(43) \times 10^{52} \text{ W} \qquad \textbf{(61)}$$

Étant donné que la puissance de Planck est décrite en fonction de l'énergie de Planck qui représente un niveau maximum d'énergie pour une particule et en fonction du temps de Planck qui est la plus petite unité de temps, la puissance de Planck représente la plus grande puissance qu'il est possible de délivrer.

Il est intéressant de noter, sans le démontrer ici, que la puissance de Planck peut être obtenue en fonction de la masse apparente de l'univers m_u et en fonction de l'âge apparent de l'univers T_u (donc en fonction de l'inverse de la constante de Hubble H_0) :

$$P_p = \frac{m_u \cdot c^2}{T_u} = m_u \cdot c^2 \cdot H_0 \tag{62}$$

Il est possible de définir la puissance de Planck P_p plus précisément en la définissant à partir de la masse de l'électron m_e, du rayon classique de l'électron r_e, de la constante de structure fine α et du facteur β en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(61)**.

$$P_p = \frac{m_e \cdot c^3 \cdot \beta}{r_e \cdot \alpha^{20}} \approx 3{,}62883647(16) \times 10^{52} \text{ W} \tag{63}$$

2.11. La densité de Planck ρ_p

La densité de Planck ρ_p est définie par :

$$\rho_p = \frac{m_p}{l_p^3} = \frac{c^5}{\hbar \cdot G^2} \approx 5{,}1556(12) \times 10^{96} \text{ kg/m}^3 \tag{64}$$

Étant donné que la densité de Planck ρ_p est définie en fonction de la masse de Planck m_p qui est la plus grande masse qui soit pour une particule et que cette densité est obtenue pour un cube ayant comme arêtes la longueur de Planck l_p, nous en concluons que la densité de Planck ρ_p correspond à la plus grande densité possible dans l'univers.

Il est intéressant de noter, sans le démontrer ici, que la densité de Planck peut être obtenue en fonction de la masse apparente de l'univers m_u et en fonction du rayon de courbure apparent de l'univers R_u :

$$\rho_p = \frac{m_u}{R_u \cdot \alpha^{57}} = \frac{c^2}{G \cdot R_u^2 \cdot \alpha^{57}} \tag{65}$$

Il est possible de définir la densité de Planck ρ_p plus précisément en la définissant à partir de la masse de l'électron m_e, du rayon classique de l'électron r_e, de la constante de structure fine α et du facteur β en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(64)**.

$$\rho_p = \frac{m_e \cdot \beta^2}{r_e^3 \cdot \alpha^{39}} \approx 5{,}15650161(24) \times 10^{96} \text{ kg/m}^3 \tag{66}$$

2.12. Le courant de Planck I_p

Le courant de Planck I_p est défini par :

$$I_p = \frac{q_p}{t_p} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot c^6 \cdot \varepsilon_0}{G}} \approx 3{,}47899(21)\times 10^{25}\ \text{A} \tag{67}$$

Il est intéressant de constater, sans chercher à le démontrer ici, qu'il est aussi possible de décrire le courant de Planck I_p en fonction de la masse apparente de l'univers m_u, de son rayon de courbure apparent R_u et de l'âge apparent de l'univers T_u (qui correspond à l'inverse de la constante de Hubble H_0) :

$$I_p = \frac{1}{T_u} \cdot \sqrt{\frac{4\pi \cdot m_u \cdot R_u \cdot \alpha^{57}}{\mu_0}} = H_0 \cdot \sqrt{\frac{4\pi \cdot m_u \cdot R_u \cdot \alpha^{57}}{\mu_0}} \tag{68}$$

Encore une fois, sans chercher à le démontrer ici, le courant de Planck I_p peut aussi être décrit en fonction de la charge de l'électron q_e, de l'âge apparent de l'univers T_u (donc de l'inverse de la constante de Hubble H_0) et de la constante de structure fine α :

$$I_p = \frac{q_e}{T_u \cdot \alpha^{29}} = \frac{q_e \cdot H_0}{\alpha^{29}} \tag{69}$$

Il est possible de définir le courant de Planck I_p plus précisément qu'en **(67)** en le définissant à partir de la masse de l'électron m_e, du rayon classique de l'électron r_e, de la perméabilité du vide μ_0, de rapport β et de la constante de structure fine α en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)**. Nous obtenons alors :

$$I_p = \frac{c}{\alpha^{10}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi \cdot m_e \cdot \beta}{\mu_0 \cdot r_e}} \approx 3{,}479151553(77)\times 10^{25}\ \text{A} \tag{70}$$

Il est aussi possible de définir le courant de Planck I_p en fonction de la charge de l'électron q_e, du rayon classique de l'électron r_e et de la constante de structure fine α. Nous obtenons alors :

$$I_p = \frac{q_e \cdot c \cdot \beta^{1/2}}{r_e \cdot \alpha^{10}} \approx 3{,}479151553(77)\times 10^{25}\ \text{A} \tag{71}$$

2.13. La tension de Planck V_p

La tension de Planck V_p est définie (en utilisant les constantes du CODATA 2010) par :

$$V_p = \frac{E_p}{q_p} = \sqrt{\frac{c^4}{4\pi \cdot G \cdot \varepsilon_0}} \approx 1{,}042976(63) \times 10^{27}\ \text{V} \quad \textbf{(72)}$$

Il est intéressant de constater, sans chercher à le démontrer ici, qu'il est aussi possible de décrire la tension de Planck V_p en fonction de la masse apparente de l'univers m_u, de son rayon de courbure apparent R_u et de l'âge apparent de l'univers T_u (qui correspond à l'inverse de la constante de Hubble H_0) :

$$V_p = \sqrt{\frac{m_u \cdot R_u \cdot H_0^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{m_u \cdot c \cdot H_0}{4\pi \cdot \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{m_u \cdot c^3 \cdot H_0 \cdot \mu_0}{4\pi}} \quad \textbf{(73)}$$

Encore une fois, sans chercher à le démontrer ici, la tension de Planck V_p peut aussi être décrite en fonction de la masse apparente de l'univers m_u , de la charge de l'électron q_e et de la constante de structure fine α :

$$V_p = \frac{m_u \cdot c^2 \cdot \alpha^{59}}{q_e} \quad \textbf{(74)}$$

Il est possible de définir la tension de Planck V_p , plus précisément qu'en **(72)**, en la définissant à partir de la masse de l'électron m_e , du rayon classique de l'électron r_e et de la constante de structure fine α en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)**. Nous obtenons alors :

$$V_p = \frac{c}{\alpha^{10}} \cdot \sqrt{\frac{m_e \cdot \beta}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_e}} \approx 1{,}043023397(23) \times 10^{27}\ \text{V} \quad \textbf{(75)}$$

Il est aussi possible de définir la tension de Planck V_p en la définissant à partir de la charge de l'électron q_e , du rayon classique de l'électron r_e , de la permittivité du vide ε_0 et de la constante de structure fine α en utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)**. Nous obtenons alors :

$$V_p = \frac{q_e \cdot \beta^{1/2}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_e \cdot \alpha^{10}} \approx 1{,}043023397(23) \times 10^{27}\ \text{V} \quad \textbf{(76)}$$

2.14. L'impédance de Planck Z_p

L'impédance de Planck Z_p est définie par :

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c} = \frac{Z_0}{4\pi} \approx 29{,}986\,\Omega \qquad \textbf{(77)}$$

Curieusement, cette impédance correspond aussi à l'impédance des câbles de transmission pour laquelle il est possible de passer un maximum de puissance. Par contre, ce n'est pas l'impédance pour laquelle les pertes sont les moindres (qui se situent autour de 77 Ω (d'où le standard des câbles coaxiaux de 75 Ω pour la télévision). L'impédance de 50 Ω des câbles de télécommunication représente un bon compromis entre un maximum de puissance pouvant être passé et un minimum de perte. En effet, la moyenne arithmétique entre l'impédance de Planck et l'impédance donnant le minimum de perte donne environ 53,5 Ω et la moyenne géométrique donne environ 48 Ω. L'impédance standardisée de 50 Ω représente donc un bon compromis.

Comme l'impédance de Planck ne dépend pas de la constante gravitationnelle et qu'elle dépend seulement de ε_0 et de c , elle est considérée exacte. Elle ne peut donc pas être définie plus précisément que dans l'équation **(77)**.

2.15. La surface de Planck s_p

La surface de Planck s_p est définie par :

$$s_p = l_p^2 = c^2 \cdot t_p^2 = \frac{\hbar \cdot G}{c^3} \approx 2{,}61186(31) \times 10^{-70}\,\mathrm{m}^2 \qquad \textbf{(78)}$$

Selon le CODATA 2010 [1], la valeur de la longueur de Planck est donnée par $l_p \approx 1{,}616199(97) \times 10^{-35}$ m.

Dans l'équation **(78)**, la longueur de Planck l_p représente la plus petite unité de longueur qu'un photon peut franchir tout en étant mesurable. Par conséquent, la surface de Planck représente la plus petite unité de surface mesurable.

Il est intéressant de noter, sans chercher à le démonter ici, que la surface de Planck s_p peut être décrite en fonction du rayon de courbure apparent de l'univers R_u et de la constante de structure fine α :

$$s_p = R_u^2 \cdot \alpha^{57} = \frac{c^2}{H_0^2} \cdot \alpha^{57} \qquad \textbf{(79)}$$

Pour obtenir une meilleure précision dans l'évaluation de la surface de Planck s_p , essayons d'exprimer l'équation **(78)** sans l'aide de la constante gravitationnelle G

et sans la constante de Planck *h*.

En utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(78)**, nous obtenons :

$$s_p = \frac{r_e^2 \cdot \alpha^{19}}{\beta} \approx 2{,}611861426(17) \times 10^{-70}\,\mathrm{m}^2 \qquad \mathbf{(80)}$$

2.16. Le volume de Planck v_p

Le volume de Planck v_p est défini par :

$$v_p = l_p^3 = c^3 \cdot t_p^3 = \left(\frac{\hbar \cdot G}{c^3}\right)^{3/2} \approx 4{,}22110(76) \times 10^{-105}\,\mathrm{m}^3 \qquad \mathbf{(81)}$$

Selon le CODATA 2010 [1], la valeur de la longueur de Planck est donnée par $l_p \approx 1{,}616199(97) \times 10^{-35}$ m.

Dans l'équation **(81)**, la longueur de Planck l_p représente la plus petite unité de longueur qu'un photon peut franchir tout en étant mesurable. Par conséquent, le volume de Planck représente la plus petite unité de volume mesurable.

Il est intéressant de noter, sans chercher à le démonter ici, que le volume de Planck v_p peut être décrit en fonction du rayon de courbure apparent de l'univers R_u et de la constante de structure fine α :

$$v_p = \left(R_u^2 \cdot \alpha^{57}\right)^{3/2} = \left(\frac{c^2}{H_0^2} \cdot \alpha^{57}\right)^{3/2} \qquad \mathbf{(82)}$$

Pour obtenir une meilleure précision dans l'évaluation du volume de Planck v_p, essayons d'exprimer l'équation **(81)** sans l'aide de la constante gravitationnelle *G* et sans la constante de Planck *h*.

En utilisant les équations **(14)**, **(15)** et **(16)** dans l'équation **(81)**, nous obtenons :

$$v_p = \left(\frac{r_e^2 \cdot \alpha^{19}}{\beta}\right)^{3/2} \approx 4{,}221095685(41) \times 10^{-105}\,\mathrm{m}^3 \qquad \mathbf{(83)}$$

3. CONCLUSION

Les unités de Planck que nous avons énumérées correspondent toutes à une limite physique ou à un paramètre qui est optimisé.

Nous avons énuméré plusieurs équations montrant un lien étroit entre les unités de Planck et les différents paramètres de notre univers dont la constante β qui provient directement de notre modèle de l'univers [10]. Sans cette constante, nous ne pourrions probablement pas trouver d'équations plus précises que celles existantes pour les unités de Planck.

Grâce à nos travaux sur la constante gravitationnelle universelle G, il est possible d'améliorer la valeur de certaines unités de Planck en les redéfinissant en fonction des caractéristiques de l'électron et de la constante de structure fine α.

4. RÉFÉRENCES

[1] "Latest (2010) Values of the Constants", NIST Standard Reference Database 121, dernière mise à jour : avril 2012, article Internet à : http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html

[2] Mercier, Claude, "Calcul de l'âge de l'univers", *Pragtec*, Baie-Comeau, Québec, Canada, 9 avril 2012, article disponible sur Internet à : www.pragtec.com/physique/

[3] Carvalho, Joel C., "Derivation of the Mass of the Observable Universe", *International Journal of Theoretical Physics*, v. 34, no 12, décembre 1995, p. 2507.

[4] Mercier, Claude, "Calcul de la masse apparente de l'univers", *Pragtec*, Baie-Comeau, Québec, Canada, 5 mai 2012, article disponible sur Internet à : www.pragtec.com/physique/

[5] Vargas, J. G. et D.G. Torr, "Gravitation and Cosmology: From the Hubble Radius to the Planck Scale", *Springer*, v. 126, 2003, pp. 10.

[6] Sepulveda, L. Eric, "Can We Already Estimate the Radius of the Universe", *American Astronomical Society*, 1993, p. 796, paragraphe 5.17.

[7] Silberstein, Ludwik, "The Size of the Universe: Attempt at a Determination of the Curvature Radius of Spacetime", *Science*, v. 72, novembre 1930, p. 479-480.

[8] Mercier, Claude, "Calcul du rayon de courbure apparent de l'univers", *Pragtec*, Baie-Comeau, Québec, Canada, 9 juin 2013, article disponible sur Internet à : www.pragtec.com/physique/

[9] Hubble, E. et Humason, M. L., "The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae", *The Astrophysical Journal*, v. 74, 1931, p.43.

[10] Mercier, Claude, "La vitesse de la lumière ne serait pas constante", *Pragtec*, Baie-Comeau, Québec, Canada, 8 octobre 2011, article disponible sur Internet à : www.pragtec.com/physique/

[11] Mercier, Claude, "Calcul de la constante gravitationnelle universelle *G*", *Pragtec*, Baie-Comeau, Québec, Canada, 13 mars 2013, article disponible sur Internet à : www.pragtec.com/physique/

[12] Einstein, Albert, "La relativité", *Petite Bibliothèque Payot*, v. 25, Paris, édition originale de 1956 de Gauthier-Villar reprise intégralement par les éditions Payot & Rivages pour l'édition de 2001, p. 109.

[13] Einstein, Albert, "On the Electrodynamics of Moving Bodies ", *The Principle of Relativity (Dover Books on Physics)*, New York, publications Dover, 1952 (article original de 1905), pp. 35-65.

[14] Mercier, Claude, "Solution à la mystérieuse équation de Weinberg", *Pragtec*, Baie-Comeau, Québec, Canada, 2 avril 2013, article disponible sur Internet à : www.pragtec.com/physique/

[15] Wang, Xiaofeng et al., "Determination of the Hubble Constant, the Intrinsic Scatter of Luminosities of Type Ia SNe, and Evidence for Non-Standard Dust in Other Galaxies", mars 2011, pp. 1-40, arXiv:astro-ph/0603392v3